SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Angelo Cavallucci

CONDIZIONI DI EULERO-LAGRANGE E DI WEIERSTRASS PER PROBLEMI VARIAZIONALI NON REGOLARI

26 giugno 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Riassunto. Vengono esposte alcune recenti condizioni necessarie del primo ordine per problemi non regolari di tipo variazionale, anche senza ipotesi di convessitá.

Abstract . We present some recent first order necessary conditions for non-smooth variational problems, also without convexity assumptions.

CONDIZIONI DI EULERO–LAGRANGE E DI WEIERSTRASS PER PROBLEMI VARIAZIONALI NON REGOLARI

ANGELO CAVALLUCCI

Consideriamo il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} J(x(.)) = l(x(0),x(1)) + \int_0^1 L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt \longrightarrow \min \\ x(.) \in W_1^1(0,1;R^n), \\ \dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \ \text{ q.d. }, \\ (x(0),x(1)) \in C \end{cases}$$

per il quale fissiamo le condizioni seguenti, relative al punto di minimo locale finito $z(.) \in W_1^1$,

(H1) $l : R^n \times R^n \to]-\infty,\infty]$ é inferiormente semicontinua;

(H2) $[0,1] \times R^n \times R^n \ni (t,x,v) \to L(t,x,v) \in]-\infty,\infty[$ é misurabile in (t,v) rispetto alla σ - algebra prodotto $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$ (dei sottoinsiemi di $[0,1]$ misurabili secondo Lebesgue per i Boreliani di R^n) e inferiormente semicontinua in (x,v);

(H3) per ogni $K > 0$ esistono $\delta > 0$ e $0 \le k(.) \in L^1(0,1)$ tali che

$$|x'-z(t)| \le \delta,\ |x'-z(t)| \le \delta \Rightarrow |L(t,x',v) - L(t,x,v)| \le k(t)|x'-x|;$$

(H4) $[0,1] \times R^n \ni (t,x) \to F(t,x) \neq \emptyset$ chiuso $\subset R^n$, é misurabile rispetto alla σ -algebra prodotto $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$;

(H5) $C \subset R^n \times R^n$ é chiuso.

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati recenti che contengono condizioni di tipo Eulero–Lagrange e di tipo Weierstrass piú precise di quelle contenute nella monografia [1] di Clarke. Questi risultati sono dovuti al contributo di Mordukhovich [8], Ioffe-Rockafellar [4], Loewen-Rockafellar [6], [7] e Vinter-Zheng [11].

Piú precisamente saranno enunciate condizioni sul problema (P) e il suo punto di minimo locale finito $z(.)$ che assicurano l' esistenza di una costante $\lambda \ge 0$ e di una funzione $p(.) \in W_1^1(0,1)$ tali che (per quasi ogni t)

(Nd) $$\lambda + \max_{0\le t\le 1} |p(t)| > 0,$$

(EL) $$\dot{p}(t) \in co\{\eta |\ (\eta,p(t)) \in \lambda\partial L(t,z(t),\dot{z}(t)) + N_{grF(t,.)}(z(t),\dot{z}(t))\},$$

(Tr) $$(p(0),-p(1)) \in \lambda\partial l(z(0),z(1)) + N_C(z(0),z(1)),$$

(W) $$p(t)\dot{z}(t) - \lambda L(t,z(t),\dot{z}(t)) \ge p(t)v - \lambda L(t,z(t),v),\ \forall v \in F(t,x).$$

Definiamo il tipo di *cono normale* e di *subgradiente* ∂f qui utilizzati. Indichiamo con xy il prodotto scalare dei vettori x, y di R^n e poniamo

$$B = \{x|\ |x| \leq 1\}$$

Sia A chiuso in R^n e $x \in A$. Poniamo

$$\hat{N}_A(x) = \{p \in R^n|\ \limsup_{C \ni x' \to x} \frac{p(x'-x)}{|x'-x|^2} < \infty\},$$

$$N_A(x) = \{\lim_{k\to\infty} p_k|\ \exists x_k \in A : p_k \in \hat{N}_A(x_k), x_k \to x\},$$

$$\Psi_A(y) = \begin{cases} 0 \text{ per } y \in A, \\ +\infty \text{ per } y \notin A \end{cases}$$

Per

$$f : R^n \longrightarrow]-\infty, \infty]$$

inferiormente semicontinua (l.s.c.) e con $f(x) < \infty$ poniamo

$$\hat{\partial} f(x) = \{y \in R^n|\ \liminf_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x) - y(x'-x)}{|x'-x|^2} > -\infty\},$$

$$\partial f(x) = \{y \in R^n|\ (y,-1) \in N_{epi(f)}(x, f(x))\},$$
$$\partial^\infty f(x) = \{y \in R^n|\ (y,0) \in N_{epi(f)}(x, f(x))\},$$

ove

$$epi(f) = \{(x,r) \in R^n \times R|\ f(x) \leq r\}.$$

Nella condizione (EL) il subgradiente ∂L é calcolato rispetto alle variabili x, u. Elenchiamo alcune proprietá degli oggetti definiti sopra.

Proposizione 1. *Sotto le condizioni indicate sopra, si ha*

a) $\{(y, f(y)) \in R^n \times R|\ \hat{\partial} f(y) \neq \emptyset\}$ *é denso in* $gr(f)$.

b) $$\partial f(x) = \{\lim_{k\to+\infty} p_k|\ \exists x_k : p_k \in \hat{\partial} f(x_k), (x_k, f(x_k)) \to (x, f(x))\},$$

$$\partial^\infty f(x) = \{\lim_{k\to+\infty} t_k p_k|\ \exists x_k, t_k > 0 : p_k \in \hat{\partial} f(x_k), (t_k, x_k, f(x_k)) \to (0, x, f(x))\}$$

e gli insiemi $\partial f(x)$ *e* $\partial^\infty f(x)$ *sono chiusi; se inoltre* f *é convessa,* $\partial f(x)$ *coincide con l'usuale subgradiente.*

c) $$N_A(x) = \partial \Psi_A(x) = \partial^\infty \Psi_A(x)$$

e se x *é punto frontiera di* A, *esistono vettori non nulli in* $N_A(x)$; *se* A *é convesso,* $N_A(x)$ *é l'usuale cono normale; il cono normale secondo Clarke é dato da (chiusura convessa)*

$$\widetilde{N}_A(x) = clco N_A(x).$$

d) Se $x \in \Omega$ *aperto, allora*

$$f \in C^2(\Omega) \Longrightarrow \hat{\partial} f(x) = \{\nabla f(x)\},$$

$$f \in C^1(\Omega) \Longrightarrow \hat{\partial} f(x) \subset \{\nabla f(x)\} = \partial f(x), \quad \partial^\infty f(x) = \{0\},$$

se $|f(x') - f(x")| \leq M|x' - x"|$ *per* $x', x" \in \Omega$, *si ha*

$$\emptyset \neq \partial f(x) \subset MB, \quad \partial^\infty f(x) = \{0\}$$

e il gradiente generalizzato secondo Clarke é dato da

$$\tilde{\partial} f(x) = co\partial f(x);$$

se $g \in C^2(\Omega)$, *si ha per ogni* f

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \nabla g(x), \quad \partial^\infty(f+g)(x) = \partial^\infty f(x).$$

e) Se $f_j(x) < \infty$ *per* $1 \leq j \leq m$ *e se*

$$0 = p_1 + p_2 + ... + p_m, \ p_j \in \partial^\infty f_j(x) \Longrightarrow p_1 = ... = p_m = 0,$$

allora

$$\partial(f_1 + ... + f_m)(x) \subset \partial f_1(x) + ... + \partial f_m(x),$$

$$\partial^\infty(f_1 + ... + f_m)(x) \subset \partial^\infty f_1(x) + ... + \partial^\infty f_m(x).$$

f) Se $x \in A_1 \cap A_2$ *e* $N_{A_1}(x) \cap (-N_{A_2}(x)) = \{0\}$ *allora*

$$N_{A_1 \cap A_2}(x) \subset N_{A_1}(x) \cap N_{A_2}(x).$$

g) Se $d_A(u) = \inf_{y \in A} |u - y| = |u - \bar{y}|$, *allora*

$$\hat{\partial} d_A(u) \subset \hat{N}_A(\bar{y}) \cap B.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [3], [5], [9].
Su W_1^1 usiamo la norma

$$\| x, W_1^1 \| = |x(0)| + \int_0^1 |\dot{x}(t)|\, dt.$$

Cominciamo a considerare il problema (P) nel caso di $F(t,x) = R^n$ e $C = R^n \times R^n$. In [11] é provato il seguente

Teorema 1. *Sia $z(.)$ un punto di minimo locale finito in $W(0,1;R^n)$. Supponiamo verificate le condizioni $(H1),(H2)$ e*

(H3') per ogni $K>0$ esistono $\delta>0$ e $0\le k(.)\in L^1(0,1)$ tali che

$$\left.\begin{array}{l} x,x'\in z(t)+\delta B \\ v\in \dot z(t)+KB \ \ q.d. \end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |L(t,x',v)-L(t,x,v)|\le k(t)|x'-x| \\ L(t,x,v)\ge -k(t). \end{array}\right.$$

Allora sono verificate le condizioni $(Nd),(EL),(Tr),(W)$ con $\lambda=1$ e $N_{grF(t.)}(z(t),\dot z(t))=\{(0,0)\}=N_C(z(0),z(1))$.

Indichiamo i punti principali della dimostrazione, seguendo [11].

I) Si modificano L e l in modo che la condizione (H3') sia soddisfatta per ogni $x,x'\in R^n$ e in modo che sia $z(t)\equiv 0$.

II) Fissiamo $\eta>0$ tale che

$$\| x(.)-z(.),W_1^1\|\le\eta\Rightarrow J(x(.))\ge J(z(.))$$

e per ogni $\epsilon\ge 0$ consideriamo lo spazio

$$W=\{(\xi,w,v)\in R^n\times L^1\times L^1 |\ |v(t)|\le K q.d.,\ |\xi|+\int_0^1|v(t)|\,dt\le\eta,$$

$$\|(\xi,w,v)\|_k<\infty\}$$

con la distanza generata da

$$\|(\xi,w,v)\|_k=|\xi|+\int_0^1 k(t)(w(t)+v(t))\,dt$$

e il funzionale

$$J_\epsilon(\xi,w,v))=l(\xi,\xi+\int_0^1 v(t)\,dt)+\int_0^1 L(t,w(t),v(t))\,dt+$$

$$+\frac{1}{\epsilon}\int_0^1 k(t)|\xi+\int_0^1 v(s)\,ds-w(t)|^2\,dt.$$

Si prova che W é completo, J_ϵ é l.s.c. e per ogni $(\xi,w,v)\in W$ si ha

$$J_\epsilon(\xi,w,v))\ge J_\epsilon(0,0,0)-\frac{\epsilon}{4}\int_0^1 k(t)\,dt.$$

Questo permette di applicare il Principio Variazionale di Ekeland e ottenere $(\xi_\epsilon,w_\epsilon,v_\epsilon)\in W$ tale che

$$\|(\xi_\epsilon,w_\epsilon,v_\epsilon)\|_k\le\alpha(\epsilon)=\left[\frac{\epsilon}{4}\int_0^1 k(t)\,dt\right]^{1/2},$$

$$J_\epsilon(\xi_\epsilon,w_\epsilon,v_\epsilon)\le J_\epsilon(\xi,w,v)+\alpha(\epsilon)\|(\xi,w,v)-(\xi_\epsilon,w_\epsilon,v_\epsilon)\|_k$$

per ogni $(\xi, w, v) \in W$.
III) Si puo' prendere una successione $0 < \epsilon_i \to 0$ per $i \to \infty$ tale che, posto

$$\xi_i = \xi_{\epsilon_i},\ w_i = w_{\epsilon_i},\ v_i = v_{\epsilon_i},\ \alpha_i = \alpha(\epsilon_i),$$

riesca per $i \to \infty$

$$\xi_i \to 0,\ w_i(.)\ e\ v_i(.) \to 0\ in\ L^1\ e\ q.d.,$$

$$l(\xi_i, \xi_i + \int_0^1 v_i(t)\,dt) \to l(0,0),\ L(t, w_i(t), v_i(t)) \to L(t,0,0).$$

Poniamo

$$l_i(x,y) = l(x,y) + \alpha_i|x - \xi_i|,$$

$$L_i(t,w,v) = L(t,w,v) + \alpha_i k(t)(|w - w_i(t)| + |v - v_i(t)|) + \frac{1}{\epsilon_i}k(t)|x-w|^2,$$

$$x_i(t) = \xi_i + \int_0^t v_i(s)\,ds,\ y_i(t) = \int_0^t |v_i(s)|\,ds,\ z_i(t) = l_i(x_i(0), x_i(1)).$$

Allora $((x_i(.), y_i(.), z_i(.)), (w_i(.), v_i(.)))$ é soluzione del problema di controllo

$$\begin{cases} z(1) + \int_0^1 L_i(t, x(t), w(t), v(t))\,dt \to \min \\ \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t),\ v(t) \in KB,\ w(t) \in R^n \\ \dot{y}(t) = |v(t)| \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x(0), x(1), z(1)) \in epi(l_i) \\ y(0) = 0,\ |x(0)| + y(1) \le \eta \end{cases} \end{cases}$$

L'Hamiltoniana

$$H(t,(x,y,z),(w,v),(p,q,r),\lambda) = pv + q|v| -$$

$$-\lambda[L(t,w,v) + \alpha_i k(t)(|w - w_i(t)| + |v - v_i(t)|) + \frac{k(t)}{\epsilon_i}|x-w|^2]$$

é di classe C^1 in (x,y,z) e quindi si applica il Principio di Massimo di [1] con le precisazioni di [6] per ottenere λ_i e $p_i(.) \in W_1^1$ tali che (q.d.)

(i)
$$-\dot{p}_i(t) = -\frac{2\lambda_i}{\epsilon_i}k(t)[x_i(t) - w_i(t)],$$

(ii)
$$(p_i(0), -p_i(1), -\lambda_i) \in N_{epi(l_i)}(x_i(0), x_i(1), z_i(1)),$$

(iii)
$$p_i(t)v - \lambda_i L_i(t, x_i(t), w, v) \le$$

$$\leq p_i(t)v_i(t) - \lambda_i L_i(t, x_i(t), w_i(t), v_i(t)) \text{ per } w \in R^n,\ |v| \leq K$$

$$(iv) \qquad \lambda_i + \max_{0\leq t\leq 1} |p_i(t)| = 1$$

da (iii) e da (i) segue

$$(v) \qquad (\dot{p}_i(t), p_i(t))(w - w_i(t), v - v_i(t)) \leq$$

$$\leq \lambda_i[L(t, w, v) - L(t, w_i(t), v_i(t))] + \lambda_i\alpha_i k(t)(|w - w_i(t)| + |v - v - v_i(t)|) +$$

$$+\frac{\lambda_i k(t)}{\epsilon_i}|w - w_i(t)|^2$$

per $|(w - w_i(t), v - v_i(t))| < K - |v_i(t)|$ e quindi

$$(vi) \qquad (\dot{p}_i(t), p_i(t)) \in \hat{\partial}[\lambda_i L(t, w, v) + \lambda_i\alpha_i k(t)|w - w_i(t)| +$$

$$+\lambda_i\alpha_i|v - v_i(t)|)]_{(w,v)=(w_i(t),v_i(t))} \subset$$

$$\subset \partial[\lambda_i L(t, w_i(t), v_i(t))] + \lambda_i\alpha_i k(t)(B \times B)$$

Ponendo $v = v_i(t)$ in (v) e $w = w_i(t) + rh$ $(0 < r \to 0)$ si ottiene, per ogni $h \in R^n$,

$$\dot{p}_i(t)h \leq \lambda_i(k(t) + \alpha_i k(t))|h|$$

e quindi

$$|\dot{p}_i(t)| \leq \lambda_i(1 + \alpha_i)k(t)) \leq 2k(t)$$

per i abbastanza grande. Ne segue che $\dot{p}_i(.)$ é debolmente relativamente compatta in $L^1(0, 1; R^n)$. Da questo e da (iv) segue che $p_i(.)$ é relativamente compatta in $C(0, 1; R^n)$.

Dunque possiamo concludere che (eventualmente per una sottosuccessione) si ha per $i \to \infty$

$$\dot{p}_i(.) \longrightarrow \dot{p}(.) \text{ debolmente in } L^1,$$

$$p_i(.) \longrightarrow p(.) \text{ uniformemente },$$

$$\lambda_i \longrightarrow \lambda \geq 0,$$

$$(vii) \qquad (p(0), -p(1), -\lambda) \in N_{epi(l)}(0, 0, l(0, 0)),$$

$$(viii) \qquad \lambda + \max_{0\leq t\leq 1} |p(t)| = 1,$$

$$(ix) \qquad p(t)v - \lambda L(t, 0, v) \leq 0 \text{ per } |v| \leq K.$$

Da (ix) e (viii) segue che non puó essere $\lambda = 0$.

Poniamo

$$Ls(\dot{p}_i(t)) = \{q \in R^n |\ \exists \text{ sottosuccessione } \dot{p}_{i_j}(t) \to q \text{ per } j \to \infty\}, 0 \le t \le 1.$$

Da un noto teorema di Balder [10] segue

$$\dot{p}(t) \in clcoLs(\dot{p}_i(t)) \text{ q.d.}$$

Si ha anche da (vi), se $\dot{p}_{i_j}(t) \to q$ per $j \to \infty$,

$$\frac{1}{\lambda_{i_j}}(\dot{p}_{i_j}(t), p_{i_j}(t)) \longrightarrow \frac{1}{\lambda}(q, p(t)) \in \partial L(t, 0, 0)$$

e quindi $(q, p(t)) \in \lambda \partial L(t, 0, 0)$ e anche

$$(x) \qquad \dot{p}(t) \in co\{q |\ (q, p(t)) \in \lambda \partial L(t, 0, 0)\},$$

poiché si fa l'involucro convesso di un insieme compatto (a causa di (H3')).
IV) Per concludere resta da togliere in (ix) la condizione $|v| \le K$.

Per questo si prende una successione $K_i \to \infty$ e si ottiene per ogni i una costante $\lambda_i > 0$ e una funzione $p_i(.) \in W_1^1(0,1)$ che verificano le condizioni trovate sopra per λ e $p(.)$ e si conclude ragionando come nel punto III).

Osservazione .- Un teorema analogo é dimostrato in [4] con metodi molto diversi che non fanno uso del Principio di Massimo.

Passiamo ora a considerare il problema (P) nel caso di $L \equiv 0$. In [11] é provato il seguente teorema

Teorema 2. *Sia $z(.)$ un punto di minimo locale finito in $W(0,1;R^n)$. Supponiamo che esistano $\delta > 0$, $k_l \ge 1$, $k_F(.) \in L^1$ tali che*

(H1') vale la condizione (H1) con $l(.,.)$ a valori reali e inoltre

$$x, x' \in z(0) + \delta B,\ y, y' \in z(1) + \delta B \Rightarrow |l(x', y') - l(x, y)| \le k_l |(x', y') - (x, y)|;$$

(H4') vale la condizione (H4) e inoltre

$$x, x' \in z(t) + \delta B \Rightarrow F(t, x') \subset F(t, x) + k_F(t)|x' - x|B.$$

Allora sono verificate le condizioni $(Nd), (EL), (Tr), (W)$ con $L \equiv 0$.

Per la dimostrazione (in [11]) si modificano F, l in modo che (H4') sia verificata per ogni $x, x' \in R^n$.

Si pone

$$W = \{(e, x(.)) \in R^n \times W_1^1(0,1;R^n) |\ (x(0), e) \in C, \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ q.d. },$$

$$\| x(.) - z(.), W_1^1 \| \le \frac{\delta}{2}\}$$

con la distanza generata da

$$\| (e, x(.)), W \| = |e| + |x(0)| + \int_0^1 |\dot{x}(t)|\, dt$$

e $0 < \delta$ tale che

$$(x(1), x(.)) \in W \Rightarrow J(x(.)) \geq J(z(.)).$$

W é completo. Poniamo, per ogni $\epsilon > 0$

$$l_\epsilon(x, y, x', y') = max\{l(x, y) - l(z(0), z(1)) + \epsilon^2, |x' - y'|\}.$$

Il funzionale

$$W \ni (e, x(.)) \longrightarrow l_\epsilon(x(0), e, x(1), e)$$

é continuo e si ha

$$l_\epsilon(x(0), e, x(1), e) \geq 0 = l_\epsilon(z(0), z(1), z(1), z(1)) - \epsilon^2.$$

Dunque si puó ancora applicare il teorema di Ekeland e trovare $(e_\epsilon, x_\epsilon(.))) \in W$ tale che

$$\| (e_\epsilon, x_\epsilon(.)) - (z(1), z(.)), W \| \leq \epsilon,$$

$$l_\epsilon(x_\epsilon(0), e_\epsilon, x_\epsilon(1), e_\epsilon) \leq l_\epsilon(x(0), e, x(1), e) + \epsilon \| (e, x(.)) - (e_\epsilon, x_\epsilon(.)), W \|$$

per ogni $(e, x(.)) \in W$.
Ne segue che $(x_\epsilon(.), y_\epsilon(.))$ é un punto di minimo locale in W_1^1 del problema

$$\begin{cases} J_\epsilon(x(.), y(.)) = l_\epsilon(x(0), y(0), x(1), y(1)) + \epsilon|x(0) - x_\epsilon(0)| + \epsilon|y(0) - y_\epsilon(0)| + \\ + \epsilon \int_0^1 |\dot{x}(t) - \dot{x}_\epsilon(t)|\, dt \rightarrow \min \\ (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \in F(t, x(t)) \times \{0\} \text{ q.d.} \\ (x(0), y(0)) \in C \end{cases}$$

Si prova poi che esiste $M > 0$ tale che $(x_\epsilon(.), y_\epsilon(.))$ é punto di minimo locale in W_1^1 per il funzionale

$$J_\epsilon(x(.), y(.)) + \Psi_C(x(0), y(0)) +$$

$$+M \int_0^1 [(1 + k_F(t)) d_{grF(t,.)}(x(t), \dot{x}(t)) + |\dot{y}(t)|]\, dt$$

A questo punto si puó applicare il Teorema 1 e ragionare come nella dimostrazione dello stesso teorema per concludere la dimostrazione (cfr. [11],Th.6).

Teorema 3. *Sia $z(.)$ un punto di minimo locale finito in $W(0,1;R^n)$. Supponiamo verificate le condizioni (H1') , (H4') e supponiamo inoltre che esista $k_L(.) \in L^1$ tale che $k_F(.)k_L(.) \in L^1$ e*

$$(H3') \qquad x, x' \in z(t) + \delta B,\ v, v' \in R^n \Rightarrow$$

$$|L(t,x',v') - L(t,x,v)| \leq k_L(t)|(x',v') - (x,v)|;$$

Allora sono verificate le condizioni $(Nd), (EL), (Tr), (W)$.

Per la dimostrazione (cfr[11]) si osserva che $z(.)$, é punto di minimo locale anche per il problema

$$\begin{cases} l(x(0),x(1)) + z(1) \longrightarrow \min \\ (\dot{x}(.),\dot{z}(.)) \in W_1^1(0,1;R^n \times R) \\ \dot{x}(.) \in F(t,x(t)) \text{ q.d.} \\ \dot{z}(t) \geq L(t,x(t),\dot{x}(t)) \text{ q.d.} \\ (x(0),x(1),z(0)) \in C \times \{0\} \end{cases}$$

Posto

$$E(t,x,z) = \{(v,w) \in R^n \times R |\ v \in F(t,x), w \geq L(t,x,v)\},$$

il problema precedente si puó scrivere nella forma

$$\begin{cases} l(x(0),x(1)) + z(1) \longrightarrow \min \\ (\dot{x}(.),\dot{z}(.)) \in W_1^1(0,1;R^n \times R) \\ (\dot{x}(t),\dot{z}(t)) \in E(t,x(t),z(t)) \text{ q.d.} \\ (x(0),x(1),z(0)) \in C \times \{0\} \end{cases}$$

Ora si puó applicare il Teorema 2 e ottenere il risultato.

In [11] é trattato anche il problema (P), nel caso autonomo, a estremi liberi.

Il problema (P) é stato studiato anche in [8] dove, sotto ipotesi qualitativamente del tipo qui considerato ma con metodi diversi, sono state ottenute le condizioni (Nd), (EL), (Tr). Si deve a Mordukhovich la forma attuale delle condizioni (EL) e l'utilizzo sistematico nei problemi di ottimizzazione del tipo di cono normale e di subgradiente qui considerati.

I risultati esposti finora non richiedono ipotesi di convessitá su $L(t,x,.)$ oppure su $F(t,x)$. In [6] e [7] sono state ottenute le condizioni (Nd), (EL), (Tr), (W) in presenza di tale ipotesi e con metodi diversi da quelli qui esposti, anche per problemi con vincoli di stato. Qui ci limitiamo al seguente teorema provato in [7]

Teorema 4. *Sia $z(.)$ un punto di minimo locale finito in $W(0,1;R^n)$. Siano $\epsilon > 0$, $0 < k(.), \delta(.) \in L^1$ tali che $k(.)/\delta(.) \in L^\infty$. Supponiamo che valgano le condizioni*

(H1") $l : R^n \times R^n \to R$ *é localmente lipschitziana su* $(z(0)+\epsilon B) \times (z(1)+\epsilon B)$;

(H2") $[0,1] \times R^n \times R^n \ni (t,x,v) \to L(t,x,v) \in R$ *e* $[0,1] \times R^n \ni (t,x) \to F(t,x) \neq \emptyset$ *chiuso* $\subset R^n$, *sono* $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ *misurabili ;*

(H3") $L(t,x,.)$ *é convessa su* R^n *e* $F(t,x)$ *é convesso per ogni* t,x*;*

(H4") *per quasi ogni* t, $F(t,.)$ *ha grafico chiuso e* $L(t,.,.)$ *é inferiormente semicontinua; inoltre*

$$\left.\begin{array}{l} \hat{v} \in F(t,\hat{x}) \\ |\hat{x} - z(t)| < \epsilon \\ x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \hat{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists v_k : \left\{\begin{array}{l} v_k \longrightarrow \hat{v} \\ v_k \in F(t,x_k) \\ L(t,x_k,v_k) \longrightarrow L(t,\hat{x},\hat{v}); \end{array}\right.$$

(H5") *per quasi ogni* t *si ha*

$$\left.\begin{array}{l} x,x' \in z(t) + \epsilon B \\ v,v' \in \dot{z}(t) + \delta(t)B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |L(t,x',v') - L(t,x,v)| \leq k(t)|(x',v') - (x,v)| \\ |w| \leq k(t)(1+|p|),\ \forall (w,p) \in N_{grF(t.)}(x,v); \end{array}\right.$$

(H6") $C \subset R^n \times R^n$ *é chiuso.*

Allora sono verificate le condizioni $(Nd),(EL),(Tr),(W)$ *e anche la condizione*

$$(H) \qquad p(t) \in co\{w|\ (-w,\dot{z}(t)) \in \partial H_\lambda(t,z(t),p(t))\},$$

con

$$H_\lambda(t,x,p) = \sup_{v \in F(t,x)} [pv - \lambda L(t,x,v)].$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [7], Th.7.1.
Osserviamo che dalla condizione (H4') segue (per quasi ogni t)

$$|w| \leq k_F(t)|p|,\ \forall (w,p) \in N_{grF(t.)}(x,v)$$

per ogni x,v tali che

$$|x - z(t)| < \delta,\ v \in F(t,x).$$

Terminiamo con due esempi, relativi ai teoremi 1 e 3, contenuti in [4].
Esempio 1. Consideriamo il funzionale in $W_1^1(0,1;R)$

$$J(x(.)) = x(0) - \gamma x(1) + \int_0^1 max[0, |\dot{x}(t)| - |x(t)|]\, dt$$

e poniamo

$$z(t) = 0,\ 0 \leq t \leq 1$$

Posto

$$L(x,u) = max[0, |u| - |x|],$$

si ha

$$\partial L(0,0) = \{(\pm\lambda,\lambda)|\ |\lambda| \leq 1\},$$

e le condizioni (Tr), (EL) assumono la forma

$$(Tr) \qquad p(0) = 1,\ p(1) = \gamma,$$

$$(EL) \qquad -|p(t)| \leq \dot{p}(t) \leq |p(t)| \leq 1$$

e di qui segue

$$e^{-t} \leq p(t) \leq 1 \text{ per } 0 \leq t \leq 1,$$
$$e^{-1} \leq \gamma \leq 1.$$

Si ha anche

$$\tilde{L}(0,0) = [-1,1] \times [-1,1]$$

e la condizione (EL) di tipo Clarke, data

$$(\dot{p}(t), p(t)) \in \tilde{\partial} L(z(t), \dot{z}(t)),$$

assume la forma

$$|\dot{p}(t)| \leq 1,\ |p(t)| \leq 1.$$

Questa condizione, insieme con (Tr), é soddisfatta da

$$p(t) = 1 - (1-\gamma)t,\ 0 \leq t \leq 1$$

per *ogni* $\gamma \in [0,1]$.

Esempio 2. Consideriamo il problema in $W_1^1(0,1;R)$

$$J(x(.)) = \int_0^1 (min[2|\dot{x}(t)|, 1 + |\dot{x}(t)|] - |x(t)|)\, dt \longrightarrow min$$
$$x(0) = 0 = x(1),$$

che ha minimo assoluto $z(t) \equiv 0$.

Infatti si ha per ogni $x(.) \in W_1^1$ con $x(0) = 0 = x(1)$

$$J(x(.)) \geq \int_0^1 (|\dot{x}(t)| - |x(t)|)\, dt \geq$$
$$\geq \int_0^1 (|\dot{x}(t)| - \int_0^t |\dot{x}(s)|\, ds)\, dt =$$
$$= \int_0^1 (|\dot{x}(t)| t\, dt \geq 0 = J(z(.))$$

Si ha anche, con

$$L(x,u) = min[2|u|, 1 + |u|] - |x|,$$
$$\partial L(0,0) = \{-1,1\} \times [-2,2]$$

e la condizione (EL) assume la forma

$$(EL) \qquad |\dot{p}(t)| \leq 1,\ |p(t)| \leq 2,$$

mentre la condizione (W) assume la forma

$$(W) \qquad min[2|u|, 1 + |u|] \geq p(t)u, \forall u \in R$$

e di qui segue

$$|p(t)| \leq 1.$$

La funzione

$$p(t) = \alpha \ \text{ (costante)}$$

soddisfa (EL) per $|\alpha| \leq 2$ e (W) *solo* per $|\alpha| \leq 1$.

BIBLIOGRAFIA

1. F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1983.
2. F. H. Clarke, *The decoupling principle in the calculus of variations*, J. Math. Anal. Appl. **172** (1993), 92–105.
3. F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, P. R. Wolenski, *Proximal analysys and minimization principles*, J. Math. Anal. Appl. **196** (1995), 722–35.
4. A. D. Ioffe, R. T. Rockafellar, *The Euler and Weierstrass conditions for nonsmooth variational problems*, Calc.Var. **4** (1996), 59–87.
5. P. D. Loewen, *Optimal Control via Nonsmooth Analysis*, CRM Proc.Lecture Notes, AMS, Providence, RI, 1993.
6. P. D. Loewen, R. T. Rockafellar, *Optimal control of unbounded differential inclusions*, SIAM J. Contr.Optim. **34, 5** (1996), 1496–1511.
7. P. D. Loewen, R. T. Rockafellar, *New necessary conditions for the generalized problem of Bolza*, SIAM J. Contr.Optim. **32, 2** (1994), 442–70.
8. B. S. Mordukhovich, *Discrete approximations and refined Euler Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions*, SIAM J. Contr.Optim. **33, 3** (1995), 882–915.
9. R. T. Rockafellar, *Extensions of subgradient calculus with applications to optimization*, Nonlin.Anal.T.M.Appl. **9, 7** (1985), 665–98.
10. M. Valadier, *Young measures, weak and strong convergence and the Visintin-Balder theorem*, Set–Valued Analysis **2** (1964), 357–67.
11. R. Vinter, H. Zheng, *The extended Euler-Lagrange condition for nonconvex variational problems*, SIAM J. Contr.Optim. **35, 1** (1997), 56–77.